

Teorema de Ptolomeu

Teorema: Num quadrilátero qualquer inscrito numa circunferência, a soma dos produtos dos lados opostos é igual ao produto das diagonais.

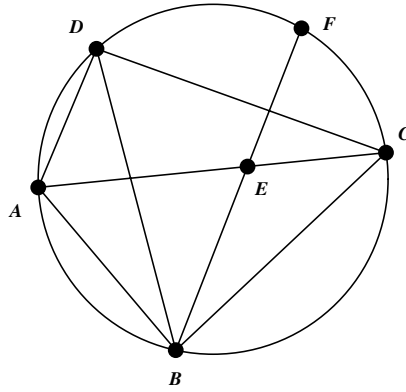
De outro modo:

Se A, B, C e D são quatro pontos sobre uma circunferência (vértices de um quadrilátero inscrito numa circunferência), então

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD} \quad (1)$$

Demonstração:

Tomemos um ponto E sobre $[BC]$, tal que $\angle(A\hat{B}E) = \angle(D\hat{B}C)$.



e, como é fácil ver, $\angle(A\hat{B}D) = \angle(C\hat{B}E)$. Da relação entre essa igualdade de ângulos inscritos e os arcos correspondentes, podemos escrever imediatamente que $\widehat{AD} = \widehat{CF}$ ou $\widehat{ADF} = \widehat{DFC}$, por exemplo. Mais: por ser $\angle(A\hat{B}E) = \angle(D\hat{B}C)$ e $\angle(A\hat{B}E) = \frac{\widehat{AD} + \widehat{DF}}{2}$, ao mesmo tempo que $\angle(D\hat{B}C) = \frac{\widehat{CF} + \widehat{FD}}{2}$, resulta que $\widehat{AD} = \widehat{CF}$.

Como $\angle B\hat{E}A = \angle E\hat{B}C + \angle B\hat{C}E = \frac{\widehat{CF} + \widehat{AB}}{2} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{AB}}{2} = \angle D\hat{C}B$, sendo por construção $\angle A\hat{B}E = \angle D\hat{B}C$, conclui-se que são semelhantes os triângulos $\Delta[ABE]$ e $\Delta[DBC]$,

Sendo os lados homólogos os opostos aos ângulos iguais, $[AB]$ oposto ao $\angle E$ do primeiro triângulo é homólogo de $[DB]$, oposto ao $\angle C$ no segundo triângulo e $[AE]$ é homólogo de $[CD]$ por serem opostos dos ângulos iguais por construção. E podemos então escrever a relação:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} \iff \overline{AE} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} \quad (2)$$

Usando os mesmos dados, e de forma em tudo análoga, concluímos que são semelhantes os triângulos $\Delta[ABD]$ e $\Delta[BCE]$, por serem iguais os ângulos $\angle A\hat{B}D = \angle C\hat{B}E$ (a que se opõem os lados $[AD]$ e $[CE]$) e os ângulos $\angle D\hat{A}B = \angle B\hat{E}C$ (a que se opõem os lados $[BD]$ e $[BC]$). E podemos escrever a relação:

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} \iff \overline{CE} \cdot \overline{BD} = \overline{AD} \cdot \overline{BC} \quad (3)$$

E somando ordenadamente as igualdades (2) e (3), obtemos

$$\begin{aligned} \overline{AE} \cdot \overline{BD} + \overline{CE} \cdot \overline{BD} &= \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} \\ (\overline{AE} + \overline{CE}) \cdot \overline{BD} &= \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} \\ \overline{AC} \cdot \overline{BD} &= \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} \end{aligned} \quad (4)$$

que era o que se pretendia provar (1). ■