As visitas do problema em viagem.

Arsélio Martins

Junho de 2004 a Março de 2005

A ideia.

Vários encontros entre professores (em Aveiro e depois em Valadares, Lisboa, Mangualde e Pombal) fizeram com que estudasse um mesmo problema, olhando para ele de diversas formas, tantas quantas as oportunidades de mobilizar diferentes metodologias, conceitos matemáticos, tecnologias, etc.

É da viagem do problema (ou problemas) pelas aulas dos 10º e 11º anos e pelos encontros de professores e da matemática desse percurso que aqui dou conta.

Ainda guardo cópias dos esforços feitos pelos grupos de alunos para escrever em português corrente um enquadramento às ilustrações fornecidas pela calculadora quando procuravam modelo e solução para o problema de Dido. Este texto é para acertar as contas com as aulas, para atar algumas pontas, para lembrar os esforços do grupo da Dina (desde a primeira resolução com a calculadora gráfica no 10º ano, até esta última usando o GSP) e de todos os outros grupos. E para me lembrar das perguntas do Francisco, em especial, mas de todos os outros que perguntam para compreender e para nos tornar melhores enquanto procuramos a via estreita - não por ser uma via por onde nos esgueiramos em fuga, mas por ser uma via que pode ser estreita por serem poucos os que persistem nas perguntas sabendo que as respostas que procuramos não são outra coisa senão próximas perguntas.)

O PROBLEMA DA SOMA DAS ÁREAS[1] que foi resolvido em Março de 2005 pelos estudantes do 11º ano com recurso ao GSP levantou as perguntas que faltavam para que estes assuntos fossem abordados globalmente numa aula de Março e é ele que faz com que retome este texto (escrito em várias versões para mim e outros professores em perpétua formação durante o ano de 2004 e agora acrescentado para os alunos do 11ºano).

O problema em estudo

Com vários enunciados, conforme as abordagens pretendidas, o problema em estudo é velho e bem conhecido :

de entre todos os rectângulos com um mesmo perímetro, qual é o que tem área máxima?

[1] Alves, Barbedo, Fonseca e Jorge. Infinito 11 Parte 2, Areal. Porto: 2004, pp 138-139

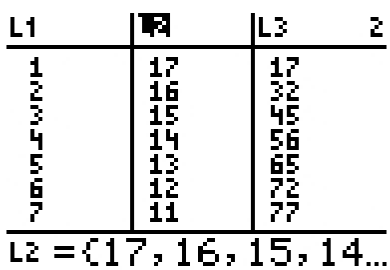
Uma primeira resolução com CG

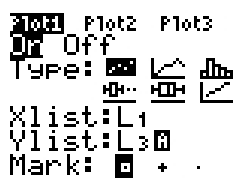
No início do 10º ano (em 2003/2004), penso que com um enunciado a lembrar "Dido, Eneias e a fundação de Cartago", o problema foi posto para ser resolvido com recurso a uma modelação ingénua. [2]

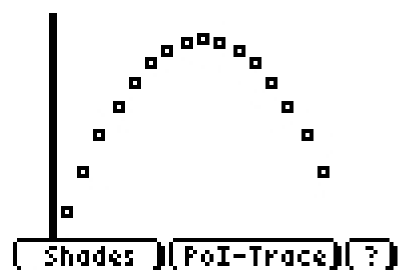
Os estudantes desenharam os diversos rectângulos de dimensões inteiras usando o quadriculado, depois de terem feito experiências com um fio.

Os estudantes puderam construir modelos para compreender o problema e para o resolver. Depois de terem realizado diversos desenhos de rectângulos, usando o quadriculado, a que fizeram corresponder as diversas áreas, utilizaram o modo $\boxed{\text{STAT}}$ para editar colunas de números correspondentes às dimensões dos rectângulos e respectivas áreas.

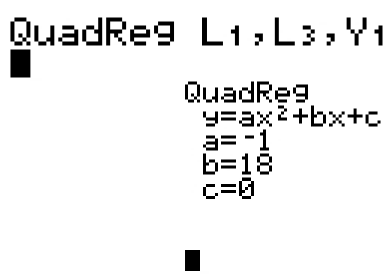
Exemplo: Para rectângulo de perímetro igual a 36 cm, se forem c e l as suas dimensões, $2(c+l) = 36$ e $c+l = 18$. Se editarmos em L_1 uma das dimensões mesmo que só para alguns naturais entre 0 e 18, $L_2 = 18 - L_1$ e $L_3 = L_1 \times L_2$, o desenho do gráfico dá imediatamente a ideia sobre qual serão máximo produto daqueles números cuja soma é constantemente igual a 18.

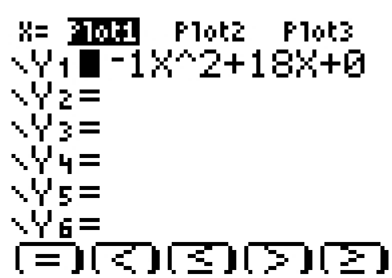




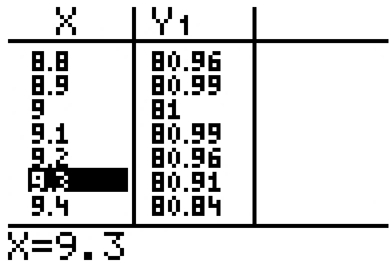


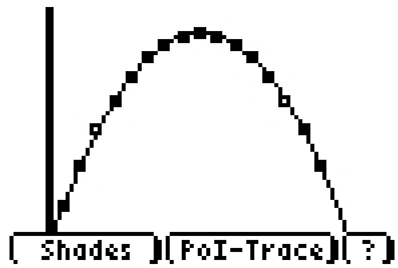
Pode parecer que o problema está resolvido. Usando $\boxed{\text{TRACE}}$ s estudantes verificam um percurso pelos pontos (lado, área) e conjecturam com alguma segurança que a área máxima é atingida quando o lado é 9. Mas o que é verdade é que os estudantes podem chegar a pedir à calculadora um modelo matemático que é um brutal enriquecimento dos dados que eles introduziram ou calcularam a partir dos introduzidos. Isso pode ver-se comparando a nova tabela $\boxed{\text{TABLE}}$ com a $\boxed{\text{STAT}}$ – $\boxed{\text{EDIT}}$ – $\boxed{L_1}$ – $\boxed{L_3}$ dos dados recolhidos inicialmente. Ou comparando a deslocação pelos gráficos com $\boxed{\text{TRACE}}$, pela nuvem de pontos (L_1, L_3) ou pela linha correspondente à função Y_1





[2] [Estou a falar das aplicações recentes com alunos envolvidos na leccionação dos novos programas. O problema foi aparecendo ao longo da minha vida, como apareceu a todos os outros professores com diferentes formulações.]





E é claro que uma parábola (qualquer que ela seja) que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(18, 0)$ tem o vértice em $x = 9$ que é o seu eixo de simetria. Assim, quando $x = 9$ a área máxima é $x \times (18 - x) = 81$.

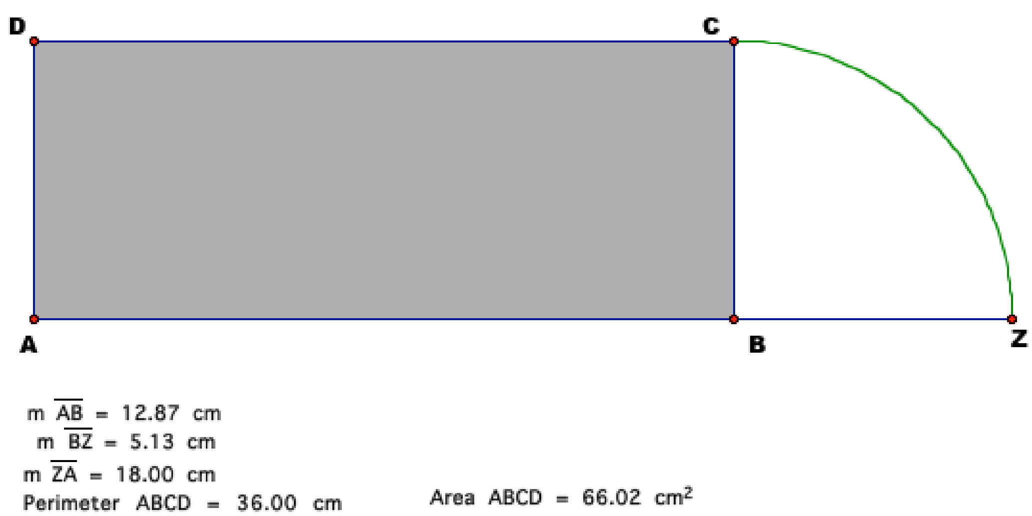
Uma outra abordagem com GSP

Se tomarmos um segmento de 18 cm e um ponto livre sobre, podemos construir um rectângulo de perímetro 36, sobre esse segmento, como mostra a figura abaixo. O ponto livre separa as duas dimensões do rectângulo.

O interesse de usar o GSP para a uma das interpretações e resoluções do problema está na animação e na ligação directa e dinâmica entre

o movimento do ponto B livre sobre o segmento $[AZ]$ de comprimento 18 cm, igual ao semiperímetro do rectângulo

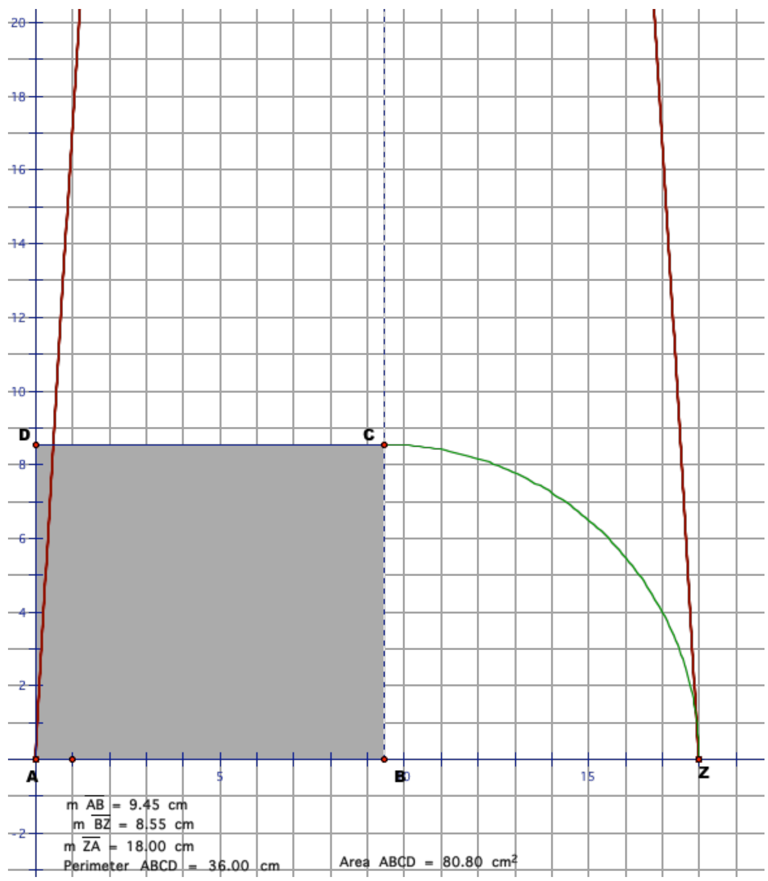
e o movimento de um ponto P cuja abcissa seja $\overline{AB}$ a variar entre 0 e 18 e cuja ordenada seja igual à área do rectângulo. Esse ponto descreve uma parábola que se desenvolve entre os pontos $(0, 0)$ e $(18, 0)$, logo com um extremo para $x = 9$.



Com o GSP, isso pode ser feito de forma muito simples. Por exemplo, tomando A para origem dos eixos, é $\overline{AB} = x_P$, sendo y_P a área de $[ABCD]$, mandada medir no menu $\boxed{\text{Measure}}$.

Selecciona-se $\boxed{\text{m } \overline{AB}}$ e $\boxed{\text{Area } ABCD}$ por esta ordem e em $\boxed{\text{GRAPH}}$ escolhe-se $\boxed{\text{Plot as(x,y)}}$ para que seja desenhado o ponto $P(\overline{AB}, Ar[ABCD])$.

Na ilustração seguinte, pode ver-se o lugar geométrico que se obtém, seleccionando, por esta ordem, o ponto B, o segmento $[AZ]$ em que B se movimenta e, finalmente, P. Com estes 3 elementos seleccionados, escolha-se no menu $\boxed{\text{Construct}}$, $\boxed{\text{Locus}}$. [3]



Uma abordagem puramente algébrica

Sabemos que se $ax^2 + bx + c = 0$ tem duas soluções x_1 e x_2, elas são

[3] Do mesmo modo, se pode realizar animação parecida no Cabri ou no Cinderella. Neste último será preciso, realizar as operações $\overline{AB} \times \overline{BC}$, usando o teorema de Thales, para marcar y_P.

$$x_1 = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

com $b^2 - 4ac \geq 0$

sendo então que, quando existem tais soluções, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.

Assim, quando $a \neq 0$ e existem soluções, como

$$ax^2 + bx + c = 0 \Longleftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

e logo, quando tem zeros x_1 e x_2,

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2\right)$$

Designando por x_1 e x_2 as dimensões do rectângulo, sabemos que $2(x_1+x_2) = 36$ ou $x_1+x_2 = 18$, serão soluções de uma equação

$$x^2 - 18x + x_1x_2 = 0$$

em que 18 é o semiperímetro do rectângulo e x_1x_2 é a área A de cada rectângulo com esse semiperímetro constante (igual a 18).

Como se sabe, esta equação só tem soluções quando $18^2 - 4A \geq 0$ que é o mesmo que dizer só tem soluções quando $A = x_1x_2 \leq 81$. Para um perímetro constante 36 ($= 2x_1 + 2x_2$) a área do rectângulo x_1x_2 é, no máximo, 81.

Esta desigualdade é extremamente potente para resolver alguns problemas de optimização - maximização e minimização.

De facto,

$$(x_1+x_2)^2 - 4(x_1x_2) \geq 0 \Longleftrightarrow (x_1+x_2)^2 \geq 4(x_1x_2)$$

diz-nos que,

– fixada a soma, o produto é máximo quando é igual à quarta parte do quadrado da soma;

ou que,

– fixado o produto, o quadrado da soma de dois números é mínimo quando for igual ao quádruplo do seu produto.

Quadrado, porquê?

É a pergunta que se segue (ou não!) na cabeça dos estudantes: Porque é que dos rectângulos de perímetro fixado, o que tem área máxima é quadrado? Até agora, temos verificado pelos exemplos que assim parece ser sempre. E é mesmo. [4]

[4] O engraçado nestas coisas é que nada se passa como esperamos. Os estudantes que acompanho nunca perguntaram porque diabo é que eram quadrados os rectângulos isoperimétricos com áreas máximas. Mas levantaram dúvidas e afirmaram limitações dos computadores quando havia algum desvio em relação a resultados desse tipo.

Como já vimos...

Se olharmos com atenção para o estudo que fizemos do trinómio

$$x^2 - Sx + P$$

que aceita os zeros x_1 e x_2 (por ser $S = x_1 + x_2$ e $P = x_1 x_2$), vimos que os seus coeficientes têm de obedecer à condição $S^2 - 4P \geq 0$ que é o mesmo que $\left(\frac{S}{2}\right)^2 \geq P$. E dai se conclui que no máximo o produto (área do rectângulo) dos zeros do trinómios (lados do rectângulo) é um quadrado de base (lado) igual à sua semi-soma.

Ou de outro modo...

Podemos garantir isso com uma pequena demonstração em que se destaca (para brilhar) o conceito de média. [5] Aproveitamos para introduzir a média harmónica e alguns resultados que a relaciona com as médias aritmética e geométrica.

---

[5] NOTAS

Dados a e b, chamamos média a um valor que esteja entre os dois e tenha uma qualidade suplementar que se pode reconhecer imediatamente na média aritmética (a mais conhecida):

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \Rightarrow a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$$

$$\forall k, a, b \in \mathbb{R}, \quad \frac{ka+kb}{2} = k\frac{a+b}{2}.$$

O significado trivial da média aritmética de dois números a e b e a sua soma $a+b$ é de um terceiro número que substitua cada um deles de modo a que a soma inicial se mantenha.

$$a + b = \frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2} = 2\frac{a+b}{2}$$

Do mesmo modo, se define (para o produto) a média geométrica de dois números $a, b \in \mathbb{R}^+$: $\sqrt{a \times b}$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ \quad ab = \sqrt{ab} \times \sqrt{ab} = \sqrt{ab}^2$$

como o terceiro número que substituíndo cada um dos factores da multiplicação $a \times b$ dá o mesmo produto. Repare-se que da aritmética para esta basta colocar multiplicação onde estava adição, quadrado onde se multiplicava por 2, divisão onde estava subtracção, raíz quadrada onde estava divisão por 2, ...

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ \quad a \leq b \Rightarrow a \leq \sqrt{ab} \leq b$$

e

$$\forall k, a, b \in \mathbb{R}^+, \quad \sqrt{ka \times kb} = k\sqrt{ab}.$$

Há ainda a média harmónica $\mathcal{H}$ de a e b - inverso da média aritmética dos inversos $\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{b}$.

$$\frac{1}{\mathcal{H}} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} = \frac{\frac{a+b}{ab}}{2} = \frac{a+b}{2ab}$$

$$\mathcal{H} = \frac{2ab}{a+b}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \leq b \Rightarrow a \leq \frac{2ab}{a+b} \leq b$$

$$\frac{2(ka)(kb)}{ka+kb} = k\frac{2ab}{a+b}$$

É óbvio que

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \quad (a-b)^2 \geq 0 \quad [(a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b]$$

Desenvolvendo o quadrado do binómio: $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$ e, somando $4ab$ a ambos os membros da desigualdade, obtemos $a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab$ que é o mesmo que $(a+b)^2 \geq 4ab$ e, em consequência, $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, o que traduz uma relação entre médias de a e b, concluindo:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ \qquad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \wedge \left[\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} \Leftrightarrow a = b\right]$$

De outro modo, multiplicando a desigualdade $(a+b)^2 \geq 4ab$ por $ab > 0$, obtém-se $ab(a+b)^2 \geq 4a^2b^2$ ou $ab \geq \dfrac{4a^2b^2}{(a+b)^2}$, que traduz outra relação entre médias de a e b:

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \wedge \left[\sqrt{ab} = \frac{2ab}{a+b} \Leftrightarrow a = b\right]$$

FInalmente:

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \wedge \left[\frac{2ab}{a+b} = \sqrt{ab} = \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow a = b\right]$$

Talvez tenha interesse generalizarmos uma leitura para

$$(a-b)^2 \geq 0 \wedge [(a-b)^2 = 0 \Longleftrightarrow a = b]$$

do tipo: $\underline{(a-b)^2 \text{ toma o seu valor mínimo quando } a = b}$, o que pode esclarecer-nos sobre a utilidade destas desigualdades para a resolução de problemas de máximos e mínimos e para responder à questão posta: porquê um quadrado?

Utilidade da leitura das desigualdades

A expressão

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \wedge \left[\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow a = b\right]$$

pode ler-se: a média geométrica de dois números reais positivos – $\sqrt{ab}$ –atinge um valor máximo quando for igual à sua média aritmética – $\dfrac{a+b}{2}$ – e isso só acontece quando for $a = b$.

Uma expressão equivalente

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \wedge \left[ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a = b\right]$$

Esta última média harmónica pode ser referida aos tradicionais problemas das torneiras, do tipo : *Se temos uma torneira que enche um tanque em 4 horas e uma outra que enche o mesmo tanque em 6 horas, quanto tempo levaria a encher o mesmo tanque cada uma de duas torneiras iguais que fizessem o mesmo que as duas referidas inicialmente?*

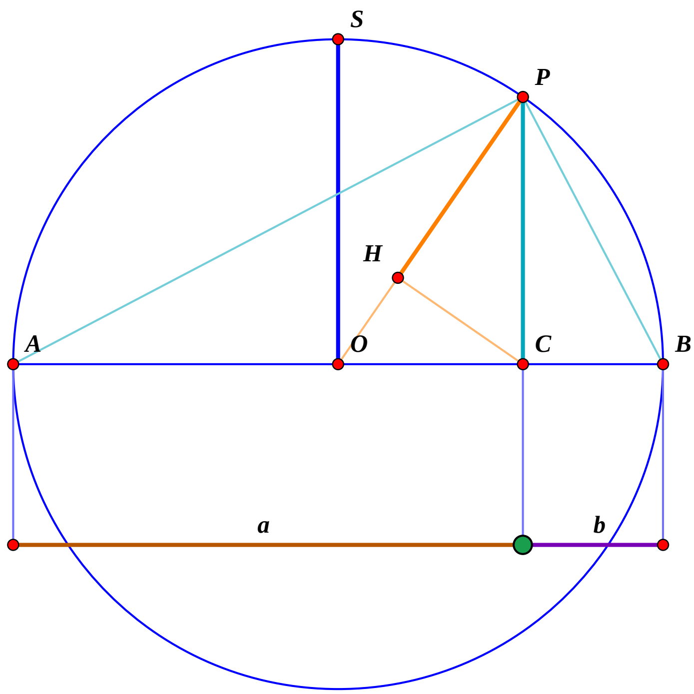
diz-nos que um rectângulo de área máxima para um dado perímetro é um quadrado.

E do mesmo modo podemos dizer que a soma de dois números de produto constante é mínima quando são iguais, isto é, um rectângulo de área dada tem perímetro mínimo quando é um quadrado.

Uma interpretação geométrica das médias e das desigualdades

Da aritmética...

Se tomarmos uma circunferência de diâmetro $\overline{AB} = a + b$, o seu raio é $\overline{OS} = \dfrac{a+b}{2}(= \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OP})$– média aritmética.



... à geométrica...

Como $[AB]$ é um diâmetro, o triângulo $[BPA]$ é rectângulo em P e são semelhantes os triângulos $[BPA]$, $[ACP]$ e $[BCP]$ rectângulos em C (estes últimos determinados pela altura $[PC]$ relativa à hipotenusa $[AB]$). Por serem complementares do mesmo ângulo,

$$\begin{array}{ccc} \text{de } \angle(CPA) & & \\ \angle(CAP) & = & \angle(CPB) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{CP} & \leftrightarrow & \overline{CB} \end{array} \quad \text{são pares de lados homólogos:} \quad \begin{array}{ccc} \text{de } \angle(CPB) & & \\ \angle(CPA) & = & \angle(CBP) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{CA} & \leftrightarrow & \overline{CP} \end{array}$$

E, podemos escrever:

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CP}} \Longleftrightarrow \overline{CP}^2 = a \times b$$

Assim, na figura, $\overline{CP}$ representa a média geométrica de a e b.

.. à comparação das duas a olho nú...

A observação confirma que $\overline{CP} \leq \overline{OS}$ – a média geométrica dos dois números é no máximo igual à sua média aritmética e tal só acontece quando $a = b$, isto é, quando $C \equiv O$

... e acabando na média harmónica, ...

Já agora, verifiquemos que nesta figura também podemos encontrar uma representação da média harmónica.

Traçámos por C uma perpendicular ao raio $[OP]$, como mostra a figura. $[CH]$ é a altura do triângulo rectângulo $[OCP]$ tirada de C para a hipotenusa $[OP]$. Como vimos para $[PC]$, a altura $\overline{CH}$ é o meio proporcional dos segmentos $\overline{OH}$ e $\overline{HP}$ em que fica dividida a hipotenusa $\overline{OP}$: $\overline{CH}^2 = \overline{OH} \times \overline{HP}$.

E, pelo Toerema de Pitágoras, também podemos escrever $\overline{CH}^2 + \overline{HP}^2 = \overline{CP}^2$, onde substituindo $\overline{CH}^2$ por $\overline{OH} \times \overline{HP}$, obtemos $\overline{OH} \times \overline{HP} + \overline{HP}^2 = \overline{CP}^2$ ou $\overline{HP}(\overline{OH} + \overline{HP}) = \overline{CP}^2$.

Ora, $\overline{OH} + \overline{HP} = \overline{OP}$ e, em consequência $\overline{HP} = \dfrac{\overline{CP}^2}{\overline{OP}}$ que é o mesmo que $\overline{HP} = \dfrac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \dfrac{2ab}{a+b}$.

A média harmónica é representada por $\overline{HP}$, cateto do triângulo rectângulo $[PHC]$ em que $\overline{PC}$ é a hipotenusa (sendo a média geométrica de a e b).

... que é a mais pequena de todas.

A olho nú se vê e, podendo justificar com argumentos geométricos simples, que

$$\overline{HP} \leq \overline{CP} \leq \overline{OP} \wedge \left[\overline{HP} = \overline{CP} = \overline{OP} \Longleftrightarrow C \equiv O \equiv H\right]$$

que é o mesmo que dizer

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \wedge \left[\frac{2ab}{a+b} = \sqrt{ab} = \frac{a+b}{2} \Longleftrightarrow a = b\right] \qquad \blacksquare$$

Agradecimentos:

A todos os que têm paciência para me aturar e foram fazendo as perguntas. De alguns nem sei os nomes. Mas devo nomear

a Conceição Sá (que colocou as primeiras perguntas em nome do seu grupo de Matemática B vai para dois anos);

a Mariana Sacchetti (que levantou algumas dúvidas aqui resolvidas, penso eu);

a Margarida Beça;

a Júlia;

a Clara Albertina;

e todos os estudantes que me acompanham há dois anos e, especialmente

pelo esforço e cuidado,

–a Dina,

pelas perguntas

–o Francisco.

Muito obrigado, por terem trabalhado comigo.

Arsélio Martins
Março de 2005
Aveiro.