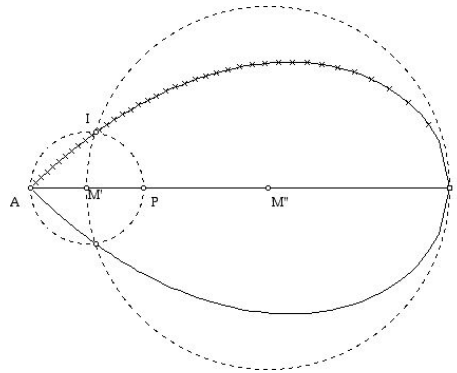


# A curva do ingénuo

Arsélio Martins  
Setembro de 2002

## 1 O espírito do lugar... geométrico

Ao fazer algumas experiências com o *Geometer's SketchPad (GSP)*<sup>1</sup>, obtivemos uma curva tão simples quanto interessante, a seguir apresentada.



Tomámos um ponto  $P$  livre sobre o segmento  $AB$  e as circunferências, uma de centro em  $M'$  – ponto médio de  $[AP]$  – passando por  $A$  e outra com centro em  $M''$  – ponto médio de  $[M'B]$  – passando por  $B$ . O lugar geométrico dos pontos de intersecção das duas circunferências é a curva que encontrámos e nos propusémos estudar.

O estudo servirá para satisfazer uma curiosidade natural: a que família pertence a nossa curva, quem a descobriu, quem e como trabalhou a sua expressão analítica?<sup>2</sup>

---

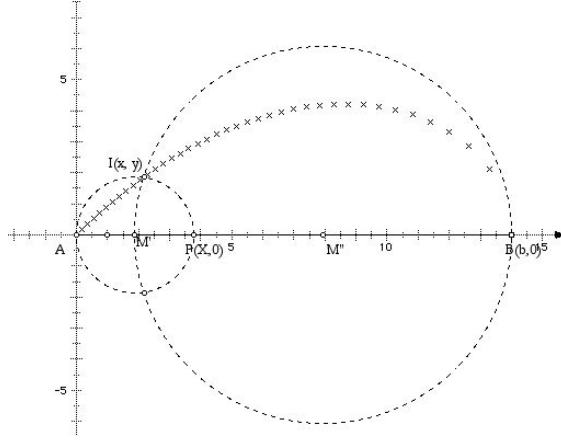
<sup>1</sup>software dinâmico para geometria, Key Curriculum Press

<sup>2</sup>A curva *folium* muito parecida com a nossa está apresentada em ”<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/history/Curves/Folium.html>”, mas sem referência à nossa forma de lugar geométrico

## 2 A geometria analítica

### 2.1 Da figura para a expressão algébrica

Para encontrarmos, com o mínimo de esforço, uma condição em  $(x, y)$  que tenha por soluções os pontos da nossa curva, temos de escolher com cuidado o melhor referencial. No caso em estudo, parece-nos óbvio. Tomamos para origem do referencial o ponto  $A(0, 0)$  e para eixo dos  $xx$  a recta  $AB$ . Designamos por  $b$  a abcissa constante de  $B$  e por  $X$  a abcissa de  $P$  que toma valores entre 0 e  $b$  quando  $P$  se desloca entre  $A$  e  $B$ . Designemos por  $x$  e  $y$  as coordenadas dos pontos  $I$  de intersecção das circunferências da figura.



Fácil é verificar que, nas condições da figura e da escolha do referencial,  $M' \hookrightarrow (\frac{X}{2}, 0)$  e  $M'' \hookrightarrow (\frac{X+2b}{4}, 0)$ ,  $\overline{IM'} = \frac{X}{2}$  e  $\overline{IM''} = \frac{2b-X}{4}$ .

Assim, os pontos  $I \hookrightarrow (x, y)$  verificam simultaneamente as equações das duas circunferências da figura,

$$I \hookrightarrow (x, y) : \begin{cases} (x - \frac{X}{2})^2 + y^2 = (\frac{X}{2})^2 \\ (x - \frac{X+2b}{4})^2 + y^2 = (\frac{2b-X}{4})^2 \end{cases}$$

Ora

$$\left(x - \frac{X}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{X}{2}\right)^2 \iff x^2 - Xx + y^2 = 0$$

e

$$\left(x - \frac{X+2b}{4}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2b-X}{4}\right)^2 \iff x^2 - \frac{X+2b}{2}x + y^2 = -\frac{bX}{2}$$

E podemos concluir que tem de ser

$$-Xx + \frac{X+2b}{2}x = \frac{bX}{2}$$

e, em consequência,

$$X = \frac{2bx}{b+x}$$

A condição relativa ao lugar geométrico dos pontos  $I$  quando  $P$  se desloca sobre o segmento  $[AB]$ , após substituição, fica assim:

$$x^2 + y^2 = x \frac{2bx}{b+x}$$

## 2.2 Da expressão algébrica para a figura

Tentámos encontrar esta expressão ou parecida no "Tratado das Curvas de Gomes Teixeira"<sup>3</sup> de que há uma edição na Biblioteca da Escola Secundária José Estêvão. Nas primeiras tentativas, não descortinámos a expressão ou o desenho da curva.

Mas ao pedir o traçado de uma curva correspondente à expressão

$$x^2 + y^2 = x \frac{2bx}{b+x}$$

no programa *Graphing Calculator (GC)*<sup>4</sup> obtivemos o que nos

---

<sup>3</sup>Francisco Gomes Teixeira(1851-1933); *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches* (traduit de l'espagnol, revu et très augmenté). Obras sobre Matemática Vol quarto. Publicação Oficial. Imprensa da Universidade, Coimbra:1908

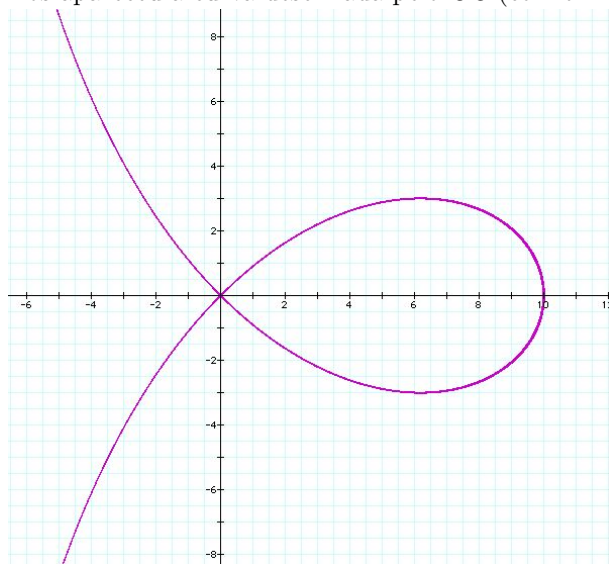
Há uma reedição recente de *Editions Jacques Gabay*; TEIXEIRA : *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches*, tome I, 1908, tome II, 1909 et tome III, 1915, Reprint, 1995, 17 x 24 cm, 416 p., 504 p. et 440 p., broché, 3 volumes, ISBN2-87647-162-0.

<sup>4</sup>software para cálculo e resolução de equações, mas principalmente muito potente para traçado de gráficos a partir de expressões, PacificTech

pareceu ser o *folium de Descartes*<sup>5</sup>.

Ou seja, a nossa curva (do lugar geométrico obtida no *GSP*) passou a aparecer-nos como uma parte de um *folium de Descartes* que vinha referido no Tratado das Curvas e lá esplendidamente desenhado.

Assim nos apareceu a curva desenhada pelo *GC* (com  $b = 10$ )<sup>6</sup>:



Acabámos a olhar para a expressão de outros pontos de vista.

$$x^2 + y^2 = x \frac{2bx}{b+x} \iff (x \neq -b \wedge x^3 + xy^2 - bx^2 + by^2 = 0)$$

o que nos remete para equação geral de uma cúbica

$$1.x^3 + 0x^2y + 1.xy^2 + 0.y^3 - bx^2 + 0.xy + by^2 + 0.x + .y + 0 = 0$$

e ao trabalho sobre essa expressão sugerido pelo *Tratado*. A saber:

---

<sup>5</sup>estudo e desenhos apresentados em

”<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/history/Curves/Foliumd.html>”

<sup>6</sup>Quando procurámos o mesmo lugar geométrico utilizando o *Cinderella*<sup>7</sup> e um ponto a mover-se sobre uma recta passando por dois pontos, obtivemos o mesmo. Repetimos então com o *GSP* para ver se este mantém as mesmas possibilidades a este nível

$$x^3 + xy^2 - bx^2 + by^2 = 0 \iff x(x^2 + y^2) = bx^2 - by^2$$

que, com uma mudança de variável "x para x - b",

se transforma em

$$(x - b)((x - b)^2 + y^2) = b(x - b)^2 - by^2$$

em que o coeficiente de  $y^2$  vem nulo, podendo a expressão ser escrita na forma

$$xy^2 = -x^3 + 4bx^2 - (b^2 + 4b)x + 2b^3$$

que é um caso particular de uma das quatro formas canónicas às quais Newton<sup>8</sup> reduziu a equação geral das cúbicas<sup>9</sup>. Mais se fica a saber que, por ser negativo o coeficiente de  $x^3$  (o que equivale a dizer que a curva admite duas assíntotas imaginárias não paralelas), Newton chamou-lhes *hipérboles defectivas*, categoria à qual pertencem as *cúbicas circulares* e o *folium de Descartes*.

### 2.3 *Folium de Descartes?*

Em nenhum lugar da obra de Gomes Teixeira, o *folium de Descartes* surge como o lugar geométrico que deu origem a estas preocupações, bem como a equação padrão  $x^3 + y^3 = 3ax$  apresentada por Gomes Teixeira<sup>10</sup> não se parece com aquela que deduzimos. E não é a mesma, como veremos.

Não nos restam dúvidas que a nossa curva tem qualidades ou propriedades comuns a um *folium de Descartes*: é uma curva plana que se intersecta a si mesma num nó formando um lacete para um dos lados.

Restaria verificar que os dois ramos do lado oposto ao lacete são assintótica a uma mesma linha. A curva correspondente

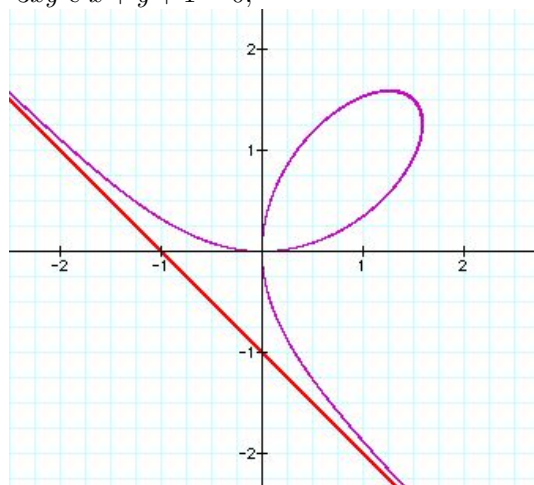
---

<sup>8</sup>Isaac Newton, 1643-1727, inglês

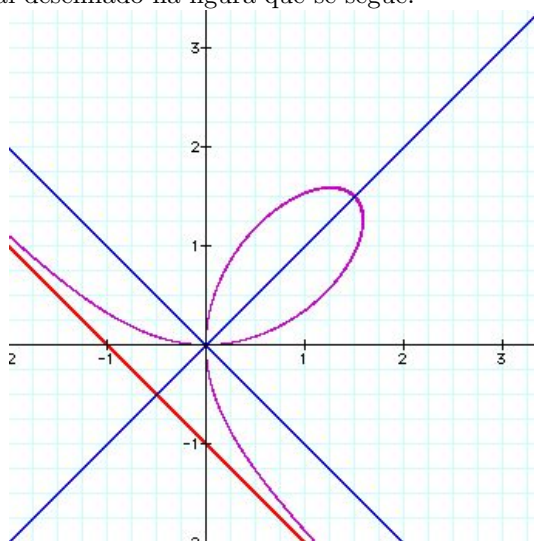
<sup>9</sup>Gomes Teixeira. Obra citada p.93

<sup>10</sup>e que é a que consta também em Borowski & Borwein. *Dictionary of Mathematics*. Harper Collins Publishers. Glasgow: 1989

à equação padrão  $x^3 + y^3 = 3axy$  admite como tal assíntota a recta de equação  $x + y + a = 0$ , como podemos ver pela figura em que se obtiveram o "folium" e a recta, usando o *GC* e as equações  $x^3 + y^3 = 3xy$  e  $x + y + 1 = 0$ ,



Parecer-nos-ia que a nossa curva (ou muito parecida, embora mais nutrida no nosso exemplo) e esta relativa à equação padrão são do mesmo tipo a menos de uma rotação de  $-45^\circ$  e centro na origem das coordenadas. Bastará calcular a equação relativo ao novo referencial desenhado na figura que se segue.



Designemos as coordenadas de um ponto  $P$  no primeiro referencial  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  por  $(x, y)$  e no segundo referencial  $((O, \vec{e}, \vec{f})$ , rotação de  $45^\circ$  do primeiro) por  $(X, Y)$ .

Por ser  $\vec{e} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$  e  $\vec{f} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ ,

$$\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} = X\vec{e} + Y\vec{f} = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)\vec{j}$$

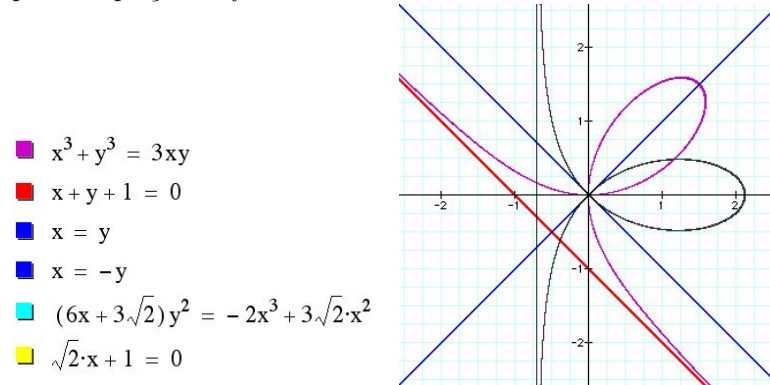
Substituindo, na equação padrão  $x^3 + y^3 = 3xy$ ,  $x$  por  $\frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)$  e  $y$  por  $\frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)$ ,

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)\right)^3 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)\right)^3 = 3\frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)\frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)$$

a equação do *folium* em  $(X, Y)$ , que, feitos cálculos e simplificações, é equivalente a

$$(6X + 3\sqrt{2})Y^2 = -2X^3 + 3\sqrt{2}X^2$$

que, a menos de uma mudança de variável, está na forma canónica de Newton típica das hipérboles defectivas (o que resolve um dos problemas), e permite uma verificação rápida no *GC* da validade dos cálculos da rotação. A assíntota  $x + y + 1 = 0$  passa a  $\sqrt{2}X + 1 = 0$ , por transformações idênticas às que foram feitas para a equação do *folium*.



Mas, se pensarmos que o *folium de Descartes* é o lugar geométrico dos pontos  $(x, y)$  que verificam a equação  $x^3 + y^3 = 3ax$ <sup>11</sup>, a nossa curva não é um *folium de Descartes*. De facto, a equação do *folium*

$(6X + 3\sqrt{2})Y^2 = -2X^3 + 3\sqrt{2}X^2$  transforma-se por uma translação

<sup>11</sup>Ver a respeito das concepções de Descartes "O aparecimento da Geometria Analítica e do Cálculo Infinitesimal" e outros textos em

Estrada, M. Fernanda, Correia de Sá, C., Queiró, J. F., Silva, M. Céu e Costa, Maria José; *História da Matemática* Universidade Aberta, Lisboa:2000

$(X, Y) \hookrightarrow (x, y) = (X - \frac{\sqrt{3}}{3}, Y)$  em

$$xy^2 = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1+\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{3+\sqrt{3}}{9}x + \frac{1+2\sqrt{3}}{18}$$

que tem coeficientes diferentes da nossa curva que era, nesta forma (de Newton):

$$xy^2 = -x^3 + 4bx^2 - (b^2 + 4b)x + 2b^3$$

Resta terminar com a consolação que nem Roverbal<sup>12</sup> (que foi o primeiro a procurar a forma da cúbica a que atribuiu os nomes de "galant" (antigo termo francês, sinónimo de "noeud de ruban") e de "flor de jasmim") nem Descartes<sup>13</sup> puderam determinar a parte da curva que está à esquerda do eixo dos  $yy$ . Infelizmente, temos de admitir que, ao tempo daqueles dois géometras, não se possuía a noção de coordenada negativa, ao contrário do que acontece no nosso tempo.

A parte da forma da cúbica (à esquerda do eixo dos  $yy$ ) que nos tinha escapado foi indicada por Huygens<sup>14</sup> e Jean Bernoulli<sup>15</sup>

### 3 A utilidade do estudo

Finalmente convém explicitar o interesse deste pequeno estudo. Com este estudo, chamamos a atenção para a potência formativa do conceito de lugar geométrico e para as potencialidades

---

<sup>12</sup>Giles Roverbal, 1602-1675, francês, considerado o pai da geometria cinemática pelas suas descobertas em geometria plana e método para desenhar a tangente a uma curva. Escreveu *Traité des indivisibles* em que desenvolve métodos potentes de integração. Inventou a balança de Roverbal

<sup>13</sup>René Descartes, 1596-1650, francês,

<sup>14</sup>Christiaan Huygens, 1629-1695, holandês, inventor do pêndulo (em *Horologium Oscillatorium* prova um resultado sobre cicloide com importantes aplicações práticas ao pêndulo e resolve o problema do pêndulo composto, trabalhou sobre colisões de corpos elásticos, descreveu a queda dos corpos no vazio; definiu evolutas e involutas de curvas, estudou a dinâmica dos corpos, trabalhou sobre a dupla refração e sobre a velocidade da luz, tendo escrito um *Traité de la lumière*

<sup>15</sup>Johann Bernoulli. 1667-1748, suíço, resolveu o problema da catenária, investigou séries usando o método da integração por partes; considerando a integração como operação inversa da diferenciação teve êxito na integração de equações diferenciais, somou séries e descobriu teoremas de adição de funções trigonométricas e hipérbólicas usando equações diferenciais; passou uma parte da vida em permanentes disputas (Leibniz/Newton sobre cálculo e Newton/Descartes sobre teoria da gravitação, por exemplo) e competições sobre autorias de resultados (L'Hôpital e com o seu próprio filho Daniel)



de motivação e descoberta que o uso da tecnologia proporciona. Chamamos ainda a atenção para as diversas sugestões de trabalho que se podem fazer em geometria analítica e cálculo (com manejo de ferramentas de cálculo disponíveis no ensino secundário), com incursões naturais em assuntos de história da matemática e para as diversas possibilidades de iniciar, de forma não artificial, os estudantes na pesquisa de informação com sentido, no estudo das nossas nacionais fontes e na criação de uma identificação dos nossos matemáticos e do nosso património cultural (quantas vezes presente em obras clássicas disponíveis nas escolas). Esperamos ter contribuído para mostrar que não é a introdução do uso da tecnologia no ensino secundário que enfraquece o trabalho com o cálculo ou com quaisquer outros assuntos de abordagem necessária.

Finalmente, pretendemos mostrar que as sugestões didácticas para o ensino da matemática dependem fundamentalmente do domínio de cada um dos conceitos matemáticos que devem ser mergulhados em cultura matemática, como parte do caldo cultural dos cidadãos.

Esperamos ainda ter sugerido um caminho para a realização de projectos, usando tecnologia e criando interesse pela evolução histórica dos conceitos e no contexto dos seus autores. ■

©Arsélio Martins, Aveiro, Outubro de 2002